УДК 330.366

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ УПРАВЛЕНИЯ КАЧЕСТВОМ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ ЭКОНОМИЧЕСКИХ СИСТЕМ[1]

Дужински Р.Р.,
доктор психологических наук, профессор,
Университет Нэшнл Льюис,
Чикаго, Иллинойс, США

Таточенко Т. В.
к.э.н., доцент
Северо-Кавказский федеральный университет,
Ставрополь, Россия

Азаров И.В.
к.э.н., доцент
Северо-Кавказский федеральный университет,
Ставрополь, Россия

Аннотация. В статье рассматривается возможность применения методов модального управления для анализа качества переходных процессов, возникающих в сложных экономических системах регионального и странового уровня. Такие макроэкономические объекты описываются моделями «затраты-выпуск» В. Леонтьева, динамический вариант которых представляет высокоразмерную систему дифференциальных уравнений. Прямой расчет переходных процессов таких систем требует применения средств высокопроизводительных вычислений и суперкомпьютерной техники. При этом обратная задача синтеза необходимого управления для достижения целей сбалансированного роста оказывается еще сложнее и требует построения итерационного процесса. Модальное управление позволяет сократить вычислительные затраты.

Ключевые слова: модальное управление, экономический рост, модель межотраслевого баланса, собственные числа, характеристическое уравнение.

[1] Статья подготовлена при финансовой поддержке РГНФ. Грант № 16-02-00091(а) «Моделирование и управление экономической динамикой сложных систем»

MATHEMATICAL METHODS TO CONTROL THE QUALITY OF TRANSIENT PROCESSES OF ECONOMIC SYSTEMS

Duszynski R. R.

doctor of psychological Sciences, Professor,

National Louis University, Chicago, Illinois, USA

Tatochenko T. V.

Ph. D., associate Professor

North-Caucasus Federal University

Stavropol, Russia

Azarov I. V.

Ph. D., associate Professor

North-Caucasus Federal University

Stavropol, Russia

Annotation. This paper examines the possibility of applying modal control methods to the analysis of the quality of transient processes occurring in complex economic systems at both regional and state levels. These macroeconomic objects are described by W. Leontiev's "input-output" balance models, a dynamic version of which is represented by the high dimensional system of differential equations. Direct calculation of transient processes of such systems requires the use of high-performance information technology and the use of supercomputer technology alike. At the same time, the complexity of the reverse task of the synthesis of necessary control in order to achieve the goals of balanced growth increases and thus requires the plotting of an iterative process, while modal control allows reduction of the computational cost.

Keywords: modal control, economic growth, input-output model, eigenvalues, characteristic equation.

Введение. В данной работе мы будем рассматривать динамическую модель межотраслевого баланса Леонтьева, имеющую следующий общепринятый вид [1]:

$$(E-A)X(t)-B\dot{X}(t)=Y(t), \qquad (1)$$

где A – матрица коэффициентов прямых затрат; $X(t)$ – вектор-функция валовых выпусков; B – матрица капитальных коэффициентов; $Y(t)$ – вектор-функция конечного спроса; E – единичная матрица.

Как будет показано ниже решение системы (1), то есть динамика вектор-функции валовых выпусков зависит от корней характеристического уравнения, каждый корень принадлежит определенной составляющей этого решения, в зарубежной литературе, иногда называемой модой. Модальное управление основано на достижении наперед заданного спектра собственных чисел путем варьирования параметрами МОБ (1), в качестве которых выступают в данном рассмотрении элементы вектора конечного спроса $Y(t)$.

Если все корни отрицательны, то экономическая система терпит спад. В случае наличия положительных корней в динамической системе наблюдается вытесняющая конкуренция отраслей. Наличие одного положительного корня гарантирует макроэкономической системе постоянный и сбалансированный рост или магистральное развитие [2].

Макроэкономические системы с падающей экономикой, как например Россия до 1998-2000, 2008-2010 года, и современный кризис характеризуются отрицательным спектром собственных чисел, который гарантирует уменьшение реального валового выпуска с течением времени для всех без исключения отраслей участвующих в модели межотраслевого баланса. Цель регулирования такой макросистемы конечным спросом заключается в выдвижении одного из собственных чисел в правую полуплоскость при соблюдении ограничений на варьируемые параметры. Собственный вектор соответствующий положительному собственному числу в такой ситуации будет определять сбалансированные пропорции развития макросистемы. Таким образом, управление структурой конечного спроса переводит макросистему из состояния спада к состоянию эффективного экономического развития. Степень эффективности такого развития целиком зависит от величины положительного собственного числа.

Методология. В современной теории линейных систем автоматического управления этот подход реализуется с помощью метода заданного расположения корней. Суть метода заключается в формировании обратных связей таким образом, что бы замкнутая по потреблению система имела заранее выбранное расположение корней характеристического уравнения. Использование алгоритмов модального управления целесообразно для моделей сложных социально-экономических систем ввиду наличия возможности «точечного» управления динамикой их развития. Такое развитие можно назвать сбалансированным, так как будет исключена возможность различных «перекосов» в управлении [3].

Взаимосвязь собственных чисел и управляющего вектора конечного спроса описывается на примере системы (1), которая будучи приведенной к нормальной форме Коши (форме пространства состояний), выглядит следующим образом:

$$\dot{X}(t) = DX(t) + F(t), \tag{2}$$

где $D = B^{-1}(E - A)$, $F(t) = -B^{-1}Y(t)$.

Эта модель открыта по потреблению. Собственные значения необходимо вычислять для замкнутой динамической системы, в которой секторы конечного спроса описываются как поглощающие продукцию, производимую в других секторах, и производящие продукцию, которую они, в свою очередь поставляют этим секторам. Для замыкания модели (2) необходимо вектор конечного спроса выразить через другие переменные. Для этих целей введем матрицу норм потребления Q:

$$Y(t) = QX(t).$$

Коэффициенты матрицы q_{ii} показывают, какое количество продукции $i - \hat{\imath}\acute{e}$ отрасли потребляется в $j - \hat{\imath}\acute{e}$ отрасли на единицу валового выпуска. Тогда система (2) преобразуется систему, замкнутую по потреблению:

$$\dot{X}(t) = GX(t) \tag{3}$$

Решение системы (3) записывается в виде:

$$X(t) = e^{Gt} X(0) \tag{4}$$

где матричная функция e^{Gt} является матрицей размера $n \times n$; $X(0)$ – начальные значения валовых выпусков $n-$ секторной макромодели.

Любая невырожденная матрица G имеет n различных собственных чисел λ с известной трудоемкостью их вычисления [4-6]. Используя теорему Сильвестра и разложение функции e^{Gt} в ряд:

$$f(G) \equiv \sum f(\lambda_k) \frac{\prod_{i \neq k} (G - \lambda_i E)}{\prod_{i \neq k} (\lambda_k - \lambda_i)} \tag{5}$$

определяется нормальная форма решения системы (3):

$$X(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} + \ldots + C_n e^{\lambda_n t} \tag{6}$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_n -$ векторы постоянных интегрирования, определяемые из начальных условий.

Можно упростить это решение путем введения n новых фазовых переменных $\tilde{X}_h$ с помощью невырожденного линейного преобразования:

$$X = T\tilde{X} \tag{7}$$

Тогда, получающаяся в результате система

$$\begin{aligned} &\dot{X}(t) = \tilde{G}\tilde{X}(t), \quad \tilde{X}(0) = \tilde{X}_0, \\ &\tilde{a}\ddot{a}\mathring{a}\tilde{G} \equiv T^{-1}GT, \quad \tilde{X}_0 \equiv TX_0 \end{aligned} \tag{8}$$

становится проще, чем первоначальная. В этом случае, если, в частности существует преобразование (7), приводящее матрицу G системы к диагональному виду, то использование $\tilde{X}_h$ преобразует первоначальную систему к системе уравнений с «разделенными» переменными:

$$\frac{d\tilde{X}_h}{dt} = \lambda_h \tilde{X}_h \tag{9}$$

решение которой имеет вид:

$$\tilde{X}_h = \tilde{X}_{h0} e^{\lambda_h t}, \ (h = 1, 2, \ldots, n) \tag{10}$$

и окончательно получаем:

$$X(t) = T \cdot diag\left(e^{\lambda t}\right) \cdot T^{-1} \cdot X(0) \tag{11}$$

где $T -$ собственные векторы матрицы G, $diag\left(e^{\lambda t}\right)$ – диагональная матрица.

С помощью преобразования подобия (7) модель пространства состояний (3) переводится в каноническую форму, еще называемую формой Фробениуса:

$$G=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -g_0 & -g_1 & -g_2 & \cdots & -g_{n-1} \end{bmatrix},$$

где $\lambda^n+g_{n-1}\lambda^{n-1}+\ldots+g_1\lambda+g_0=det\left(\lambda E-G\right)$ – характеристический полином G.

Сравнивая (6) и (11) заметим, что решение системы (3) зависит как от собственных чисел матрицы G, так и от собственных векторов. При этом динамические свойства системы целиком определяются собственными числами матрицы G, в то время как собственные вектора этих чисел определяют постоянные интегрирования, влияя на амплитуды собственных движений валового выпуска.

Если валовые выпуски макроэкономической системы находятся в состоянии падения и это сопровождается различными колебаниями, следовательно, среди собственных чисел матрицы G имеются отрицательные и числа образующие комплексно-сопряженные пары. Естественно, что такие числа должны подлежать изменению. В этом случае скалярное управляющее воздействие вектором конечного спроса может быть сформировано как линейная функция переменных состояния, которыми в нашей модели являются валовые выпуски:

$$Y\left(t\right)=q_1x_1+\ldots+q_nx_n=QX\left(t\right),$$

где Q - матрица строка. В данном случае элементы матрицы Q будут являться коэффициентами обратной связи, с помощью которых достигается необходимое расположение корней характеристического уравнения на комплексной плоскости. Замкнутая по потреблению модель имеет вид (3). Матрица замкнутой системы G должна иметь заданные собственные значения. Сформируем желаемую сопровождающую матрицу, как это показано в [5]:

$$D^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -d_0^* & -d_1^* & -d_2^* & \cdots & -d_{n-1}^* \end{bmatrix},$$

в которой элементами последней строки являются коэффициенты желаемого характеристического полинома. Примем, что уравнение (3) записано в управляемом каноническом базисе – матрица D имеет форму Фробениуса:

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ d_{n1} & d_{n2} & d_{n3} & \cdots & d_{nn} \end{bmatrix}.$$

Тогда матрица системы также имеет форму Фробениуса:

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ d_{n1}-q_1 & d_{n2}-q_2 & d_{n3}-q_3 & \cdots & d_{nn}-q_{nn} \end{bmatrix}.$$

Результаты и их обсуждение. Искомые коэффициенты обратной связи матрицы норм потребления Q определяются из равенства матриц D^* и D:

$$\mathrm{q_i = d_{ni} + d^*_{i-1}}.$$

Исходя из вышеуказанного определения, матрица норм потребления Q является строкой, коэффициенты которой полностью определяют динамические свойства всей макросистемы. На практике может возникнуть ситуация, когда рассчитанные нормы потребления недостижимы в данное время для выбранной экономической системы, тогда следует перейти к вычислению другой строки матрицы Q и так далее до тех пора пока все условия и ограничения не будут выполнены.

Выводы. Применение модального управления для контроля качеством переходных процессов возникающих в сложных экономических системах позволяет формировать матрицу норм потребления в соответствии требованиями сбалансированного роста валовых выпусков. Такое управление можно считать избирательным, так как воздействие осуществляется только на определенные составляющие движения, которые отвечают за рост и колебательную устойчивость системы. Включение современных методов модального управления в задачи государственного регулирования макроэкономической ситуацией следует считать перспективным и применимым как на региональном уровне, так и в масштабах всей страны.

Библиографический список.

1. Леонтьев В.В. Экономические эссе: теории, исследования, факты и политика. –М: 1990.

2. Мараховский А.С., Бабкин А.В., Ширяева Н.В. Оптимальное управление неустойчивыми макроэкономическими системами // Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. Экономические науки. 2015. № 2 (216). С. 18-24.

3. Мараховский А.С., Ширяева Н.В., Таточенко Т.В. Математическое моделирование оптимального управления в социально-экономических системах //Вестник Северо-Кавказского федерального университета. 2014. № 2 (41). С. 274-279.

4. Груздев И.А., Торопцев Е.Л., Устинов С.М. Исследование эффективности расчета корней характеристических уравнений высоких порядков при решении задач устойчивости // Известия высших учебных заведений и энергетических объединений СНГ. Энергетика. 1986. №4. С. 7-10.

5. Торопцев Е.Л., Мараховский А.С. Методы достижения оптимальных траекторий экономического развития на основе межотраслевых моделей // Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. Экономические науки. 2007. № 4(52). С. 260-267.

6. Дужински Р., Торопцев Е.Л. Оценка влияния инвестиционных проектов на экономический рост // Региональная экономика: теория и практика. 2015. № 14 (389). С. 16-28.

Bibliograficheskiy spisok.

1. Leontev V.V. Ekonomicheskie esse: teorii, issledovaniya, faktyi i politika. (Economic essays: theory, research, facts and policy.) –M: 1990.

2. Marahovskiy A.S., Babkin A.V., Shiryaeva N.V. Optimalnoe upravlenie neustoychivyimi makroekonomicheskimi sistemami (Optimal control of unstable macro-economic systems) // Nauchno-tehnicheskie vedomosti Sankt-Peterburgskogo gosudarstvennogo politehnicheskogo universiteta. Ekonomicheskie nauki. 2015. # 2 (216). S. 18-24.

3. Marahovskiy A.S., Shiryaeva N.V., Tatochenko T.V. Matematicheskoe modelirovanie optimalnogo upravleniya v sotsialno-ekonomicheskih sistemah (Mathematical modeling of optimal control in socioeconomic systems) //Vestnik Severo-Kavkazskogo federalnogo universiteta. 2014. # 2 (41). S. 274-279.

4. Gruzdev I.A., Toroptsev E.L., Ustinov S.M. Issledovanie effektivnosti rascheta korney harakteristicheskih uravneniy vyisokih poryadkov pri reshenii zadach ustoychivosti (investigation of the efficiency calculation of the roots of the characteristic equations of higher order when solving problems of stability)// Izvestiya vyisshih uchebnyih zavedeniy i energeticheskih ob'edineniy SNG. Energetika. 1986. #4. S. 7-10.

5. Toroptsev E.L., Marahovskiy A.S. Metodyi dostizheniya optimalnyih traektoriy ekonomicheskogo razvitiya na osnove mezhotraslevyih modeley (Methods of optimal trajectories of economic development on the basis of interindustry models)// Nauchno-tehnicheskie vedomosti Sankt-Peterburgskogo gosudarstvennogo politehnicheskogo universiteta. Ekonomicheskie nauki. 2007. # 4(52). S. 260-267.

6. Duzhinski R., Toroptsev E.L. Otsenka vliyaniya investitsionnyih proektov na ekonomicheskiy rost (assessment of the impact of investment projects on economic growth) // Regionalnaya ekonomika: teoriya i praktika. 2015. # 14 (389). S. 16-28