УДК 330.44

ДВОЙСТВЕННАЯ МОДЕЛЬ МЕЖОТРАСЛЕВОГО БАЛАНСА [1]

Газван Ракан Касим
Аспирант
Северо-Кавказский федеральный университет,
Ставрополь, Россия

Мараховский А.С.
д.э.н., доцент,
Северо-Кавказский федеральный университет,
Ставрополь, Россия

Киселева Т.В.
к.физ.-мат.н., доцент
Северо-Кавказский федеральный университет,
Ставрополь, Россия

Аннотация. В работе представлена двойственная модель Леонтьева, учитывающая вектор цен. Модель рассмотрена в дух видах – статическом и динамическом, и обобщена на случай учета затрат на устранение загрязнений. Важно, что соответствующие двойственные балансовые модели были построены не только на формальной математической основе, а также на основе ясных и общепринятых экономических гипотез. Данные двойственные модели дают возможность анализировать структуру равновесных цен для межотраслевой экономики и для межотраслевой экологической экономики соответственно.

Ключевые слова: двойственная модель, межотраслевой баланс, равновесные цены, валовый выпуск, материальные затраты, конечный продукт.

---

[1]Статья подготовлена при финансовой поддержке РГНФ. Грант № 16-02-00091(а) «Моделирование и управление экономической динамикой сложных систем»

DUAL MODEL OF THE INTER-BRANCH BALANCE

Ghazwan Rakan Qasim

Graduate student,

North-Caucasus Federal University

Stavropol, Russia

Marakhovskiy A. S.

doctor of Economics, associate Professor,

North-Caucasus Federal University

Stavropol, Russia

Kiseleva T. V.

Phys.-M. D., associate Professor

North-Caucasus Federal University

Stavropol, Russia

Abstract. The paper presents the dual Leontief model, taking into account the vector of prices. The model considered in the spirit of types (static and dynamic) and generalized to the case of cost accounting to eliminate contaminants. It is important that the corresponding dual balance model was built not only on formal mathematical basis and on the basis of clear and generally accepted economic hypotheses. Data dual models provide an opportunity to analyze the structure of equilibrium prices for cross-industry economics and ecological economics, respectively.

Keywords: dual model, inter-industry balance, equilibrium prices, gross output, material inputs, final product.

Статическая модель Леонтьева является одной из первых линейных балансовых моделей, построенных на детализированных показателях. Это – классическая модель, известная под названием «затраты-выпуск». Она представляет собой обобщение системы линейных уравнений и матрицы А. При этом система линейных уравнений:

$$X = Y + A \cdot X, \tag{1}$$

при А> 0 и y> 0 имеет решение, если А - продуктивная матрица, то есть, если ее максимальное собственное число λ_A (корень Фробениуса) удовлетворяет неравенствоу $0 < \lambda_A <1$. Тогда существует обратная матрица $(I - A)^{-1} \geq 0$.

В системе (1) приняты следующие обозначения: X = {x1…, xn} - вектор валового выпуска продукции в натуральном измерении; Y = {y1 ..., yn} - вектор продукции в натуральном измерении, которая идет на накопление; А - квадратная матрица материальных затрат.

Чтобы построить двойственную модель (модель цен), введем в рассмотрение вектор-строку цен p = (p1, p2, ..., pn) > 0 и умножим уравнение (1) слева на вектор p > 0.

Получаем:

$$p_x = pA_x + p_y , \tag{2}$$

где p_y - стоимость конечного продукта.

Используем классическую общепринятую экономическую гипотезу - «стоимость конечного продукта равна оценке валового продукта», что в нашем случае означает

$$p_y = r_x \tag{3}$$

где r = (r1, r2, ..., rn) - вектор-строка оценок валового продукта x.

Подставим (3) в (2) и перепишем полученное в виде:

$$(p - pA - r) x = 0 \tag{4}$$

Поскольку данное соотношение должно выполняться при любых x> 0, то это возможно только, если:

$$p = pA + r, p \geq 0 \tag{5}$$

Это будет являться моделью цен. Равновесные цены p> 0 существуют при А> 0, r > 0, если $0 < \lambda_A <1$.

В данном исследовании не менее необходимой будет динамическая модель Леонтьева, поскольку в случае, когда конечный продукт направляется не только на потребление, но и на расширение производства, применяется динамическая балансовая модель Леонтьева [1]:

$$x = Ax + B\dot{x} + y,\ x \geq 0, \tag{6}$$

где $X_t(t) = \{x_1(t), ..., x_n(t)\}$ - вектор-столбец интенсивностей валового выпуска продукции в момент t,

$Y_t(t) = \{y_1(t), ..., y_n(t)\}$ - вектор-столбец интенсивностей потребления конечной продукции в момент t,

$\dot{X}_t(t) = \{\dot{x}_1(t), ..., \dot{x}_n(t)\}$ – вектор-столбец приростов интенсивностей производства валовой продукции (точка над буквой обозначает производную во времени);

A > 0 - неотъемлемая матрица коэффициентов прямых затрат производства;

B > 0 - неотъемлемая матрица коэффициентов фондоемкости продукции, элемент b_{ij} которой показывает, какое количество продукции и необходимо затратить (технологические нормативы) на единичный прирост мощностей производства продукта j.

Пусть p, как и раньше, вектор-строка цен на продукцию. Умножим уравнение (6) слева на вектор p > 0. Получаем:

$$px = pAx + pB\dot{x} + py \tag{7}$$

где py - стоимость конечного продукта, pBx - стоимость прироста мощностей.

Используем две классические общепринятые экономические гипотезы: «стоимость конечного продукта равна оценке валового продукта» и «стоимость всего капитала неизменна во времени». Эти гипотезы означают:

$$py = rx,$$

$$\frac{d}{dt}\, pBx = \dot{p}Bx + pB\dot{x}$$

Тогда соотношение (1.17) принимает вид:

$$px = pAx - \dot{p}Bx + rx,$$

или

$$(\, p - pA + \dot{p}B - r\,)\, x = 0 \tag{8}$$

Поскольку соотношение (8) должно быть справедливым при любом x > 0, то

$$p = pA - \dot{p}B + r,\ p \geq 0 \qquad (9)$$

Это и есть двойственная модель цен для динамической модели Леонтьева. При этом с ростом производства во времени цена на продукцию падает.

При этом, если принять такую нетрадиционную гипотезу - «расширение производства осуществляется за счет инфляции», то это означало бы, что $pB\dot{x} = \dot{p}Bx$.

Тогда вместо модели (9) должна была бы быть модель цен в виде:
$p = pA + \dot{p}B + r,\ p \geq 0$, для которой с ростом производства во времени росла бы и цена продукции.

Статическая модель Леонтьева-Форда сформировалась в результате того, что межотраслевая модель Леонтьева «расходы-выпуск» была обобщена на случай эколого-экономического баланса [2]. Такая модель получила название модели Леонтьева-Форда:

$$x_1 = A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + y_1,\ x_1 \geq 0,$$

$$x_2 = A_{21}x_1 + A_{22}x_2 - y_2,\ x_2 \geq 0 \qquad (10)$$

где $(x_1 = \ x_1^1, x_2^1, \dots, x_n^1)^{\mathrm{T}}$ - вектор-столбец валового производства продукции;

$(y_1 = \ y_1^1, y_2^1, \dots, y_n^1)^{\mathrm{T}}$ - вектор-столбец конечного продукта;

$(x_1 = \ x_1^1, x_2^1, \dots, x_m^1)^{\mathrm{T}}$ - вектор-столбец объемов уничтоженных загрязнителей;

$(y_1 = \ y_1^1, y_2^1, \dots, y_m^1)^{\mathrm{T}}$ - вектор-столбец объемов не переработанных загрязнителей (выбросов в окружающую среду);

$A_{11} \geq 0$ - технологическая матрица коэффициентов прямых затрат продукции основным производством;

$A_{12} \geq 0$ - технологическая матрица коэффициентов прямых затрат продукции очистными сооружениями;

$A_{21} \geq 0$ - технологическая матрица коэффициентов выпуска загрязнителей основным производством;

$A_{22} \geq 0$ - технологическая матрица коэффициентов выпуска загрязнителей очистными сооружениями.

Для существования неотъемлемых решений $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ модели Леонтьева-Форда (10) при $y_1 \geq 0$, $y_2 \geq 0$ (то есть, для продуктивности модели) достаточно, чтобы клеточная матрица:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

была продуктивной, то есть, $0 < \lambda_A < 1$, а также, чтобы выполнялось условие $A_{21} y_1 > y_2$ [3].

В модели (10) $y_1 > 0$ - конечный продукт является благом для общества. Вместе с тем, в экологической экономике $y_2 > 0$ является антиблагом. Тогда величина ($-y_2$) может рассматриваться как отрицательное сальдо «позитив минус негатив» и иметь свою оценку.

Пусть $(p_1 = p_1^1, p_2^1, \dots, p_n^1)$ - цена продукции, $(p_1 = p_1^1, p_2^1, \dots, p_m^1)$ - стоимость уничтожения загрязнителей. Умножим слева первое уравнение системы (10) на $p_1 \geq 0$, а второе уравнение - на $p_2 \geq 0$. Получим:

$$p_1 x_1 = p_1 A_{11} x_1 + p_1 A_{12} x_2 + p_1 y_1,$$

$$p_2 x_2 = p_2 A_{21} x_1 + p_2 A_{22} x_2 - p_2 y_2 \qquad (11)$$

Сложим эти равенства:

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 = p_1 A_{11} x_1 + p_2 A_{21} x_1 + p_1 A_{12} x_2 + p_2 A_{22} x_2 + p_1 y_1 - p_2 y_2$$

Используем классическую для экологической экономики гипотезу - «суммарная стоимость потребления эколого-экономического продукта равна суммарной оценке производства». Эта гипотеза формализуется так [4]:

$$p_1 y_1 - p_2 y_2 = r_1 y_1 - r_2 y_2 \qquad (12)$$

где $r_1 = (r_1^1, r_2^1, \dots, r_n^1)$ - вектор-строка оценок основного производства, $X_1 \geq 0$, а $r_1 = (r_1^1, r_2^1, \dots, r_m^1)$ - - вектор-строка оценок производства очистных сооружений $X_2 \geq 0$.

С учетом гипотезы (12) соотношение (11) принимает вид:

$$(p_1 x_1 - p_1 A_{11} - p_2 A_{21} - r_1) x_1 + (p_2 - p_1 A_{12} - p_2 A_{22} - r_2) = 0 \qquad (13)$$

Поскольку соотношение (13) должно выполняться при любых $X_1 \geq 0$, $X_2 \geq 0$, то

$$p_1 = p_1 A_{11} x_1 + p_2 A_{21} + r_1,\ p_1 \geq 0$$
$$p_2 = p_1 A_{12} + p_2 A_{22} + r_2,\ p_2 \geq 0 \qquad (14)$$

Это и есть двойственная модель (модель цен) Леонтьева-Форда.

Рассмотрим также динамическую модель Леонтьева-Форда. В случае, когда конечный продукт направляется не только на потребление, но и на расширение мощностей производства продукции и очистных сооружений, применяется динамическая модель Леонтьева-Форда [5]:

$$x_1 = A_{11} x_1 + A_{12} x_2 + B_1 \dot{x}_1 + B_2 \dot{x}_2 + y_1,\ x_1 \geq 0$$
$$x_2 = A_{21} x_1 + A_{22} x_2 - y_2,\ x_2 \geq 0 \qquad (15)$$

где $\dot{x}_1 = (\dot{x}_1^1, \dot{x}_2^1, \dots, \dot{x}_n^1)^{\mathrm{T}}$ - приращение интенсивности производства продукции;

$\dot{x}_1 = (\dot{x}_1^2, \dot{x}_2^2, \dots, \dot{x}_m^2)^{\mathrm{T}}$ - - приращение интенсивности работы очистных сооружений;

$A_{11} \geq 0$; $A_{12} \geq 0$; $A_{21} \geq 0$; $A_{22} \geq 0$ - технологические матрицы описаны ранее;

$B_1 \geq 0$- технологическая матрица коэффициентов фондоемкости основного производства;

$B_2 \geq 0$ - технологическая матрица коэффициентов фондоемкости очистных сооружений.

Пусть $p_1 \geq 0$ и $p_2 \geq 0$, как и ранее цены на продукцию и стоимость утилизации загрязнителей соответственно. Умножим слева первое уравнение системы (1.25) на p_1, а второе уравнение на p_2. Получим:

$$p_1 x_1 = p_1 A_{11} x_1 + p_1 A_{12} x_2 + p_1 B_1 \dot{x}_1 + p_2 B_2 \dot{x}_2 + p_1 y_1,$$
$$p_2 x_2 = p_2 A_{21} x_1 + p_2 A_{22} x_2 - p_2 y_2 \qquad (16)$$

Сложим равенства. Получим:

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 = p_1 A_{11} x_1 + p_2 A_{21} x_1 + p_1 A_{12} x_2 + p_2 A_{22} x_2 + p_1 B_1 \dot{x}_1 + p_2 B_2 \dot{x}_2 + p_1 y_1 - -p_2 y_2$$

Используем две классические для экологической экономики гипотезы: «суммарная стоимость потребления эколого-экономического продукта равна суммарной оценке производства» и «стоимость всего капитала неизменна во времени». Эти гипотезы означают:

$$p_1y_1 - p_2y_2 = r_1y_1 + r_2y_2$$

$$\frac{d}{dt}\,(p1B1x1 + p2B2x2) = \dot{p}_1B_1x_1 + \dot{p}_2B_2x_2 + p_1B_1\dot{x}_1 + p_1B_2\dot{x}_2 \qquad (17)$$

С учетом (1.27) соотношение (1.26) принимает вид:

$$(p_1 - p_1A_{11} - p_2A_{21} + \dot{p}_1B_1 - r_1)x_1 + (p_2 - p_1A_{12} - p_2A_{22} + p_1B_2 - r_2)x_2 = 0 \qquad (18)$$

Поскольку соотношение (18) должно быть справедливым при любом $x_1 \geq 0$ и $x_2 \geq 0$, то

$$p_1 = p_1A_{11} + p_2A_{21} - \dot{p}_1B_1 + r_1,\ p_1 \geq 0.$$

$$p_2 = p_1A_{12} + p_2A_{22} - \dot{p}_2B_2 + r_2,\ p_2 \geq 0 \qquad (19)$$

Это и есть двойственная динамическая модель Леонтьева-Форда (модель цен). На основе второго соотношения можно сделать вывод, что увеличение во времени производства продукции, а также увеличение во времени объемов уничтожения загрязнителей, непосредственно приводит к автоматическому уменьшению во времени цен на продукцию и стоимости утилизации загрязнителей. Действует эффект неизменности во времени количества денег в экономике. Важно, чтобы соответствующие двойственные балансовые модели строились не только на формальной математической основе, а также на основе ясных и общепринятых экономических гипотез.

Вывод. Имеются двойственные балансовые модели для статических и динамических моделей «затраты-выпуск» Леонтьева и Леонтьева-Форда. Эти модели дают возможность анализировать структуру равновесных цен для межотраслевой экономики и для межотраслевой экологической экономики соответственно. Равновесие цен на продукцию, и их изменение описывается двойственными балансовыми моделями «затраты-выпуск», которые на сегодня еще не изучены досконально. Особенно это касается динамических моделей Леонтьева и Леонтьева-Форда.

Библиографический список:

1. Мицель А.А. Разработка системы имитационного моделирования экономических объектов на основе объектно-ориентированного подхода / А.А. Мицель, Е.Б. Грибанова // Из- вестия ТПУ. – 2007. – Т. 311. – № 6. – С. 11–15.

2. Поздеев, С. И. Внутриотраслевые балансы. (Методы оптимизации) [Текст]: монография / С. И. Поздеев. - Киев: Вища школа, 1977. – С. 96

3. Шелобаев С. И. Математические методы и модели в экономике, финансах, бизнесе: Учеб. пособие для вузов. — М.: ЮНИТИ: ДАНА, 2000. — С. 291

4. Колемаев В. А. Математическая экономика: Учебник для вузов. — М.: ЮНИТИ, 1998. — С. 201

5. Леонтьев, В. Межотраслевой анализ воздействия структуры экономики на окружающую среду/В. Леонтьев, Д. Форд//Экономика и математические методы. -1972.-Т. VIII. -Вып.3.