УДК 330.4+519.85

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЗАДАЧИ КВАДРАТИЧНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ ДЛЯ ПОЛУЧЕНИЯ ОПТИМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТОВАРОВ МЕЖДУ РЕГИОНАМИ В УСЛОВИЯХ РЕГУЛИРУЕМОГО ПРЕДЛОЖЕНИЯ

Коростелева М.В.,

к.э.н., доцент,

Санкт-Петербургский государственный университет,

Санкт-Петербург, Россия

Аннотация

В настоящей статье демонстрируется экономико-математическая модель определения цен и объема поставок товаров между регионами. Вводятся линейные региональные соотношения спроса и предложения, и на основе экономико-математической модели определения цен на перевозимый товар и его объема формулируется задача квадратичного программирования. Также в статье показывается возможность использования представленной модели для получения оптимального распределения и определения цен на воду в условиях регулируемого предложения воды в бассейне реки.

Ключевые слова: регион, товар, спрос, предложение, цена, объем поставок, квадратичное программирование

AN APPLICATION OF THE SQUARE PROGRAMMING PROBLEM TO OBTAIN THE OPTIMUM DISTRIBUTION OF GOODS BETWEEN REGIONS UNDER REGULATED SUPPLY CONDITIONS

Korosteleva M.V.,

PhD, Associate Professor,

Saint-Petersburg State University,

Saint-Petersburg, Russia

Abstract

This article demonstrates an economic and mathematical model for determining prices and supply of goods between regions. Linear regional ratios of supply and demand are introduced, and based on an economic and mathematical model for determining the prices of the transported goods and its volume, a quadratic programming problem is formulated. The article also shows the possibility of using the presented model to obtain the optimal distribution and determination of water prices in the context of a regulated water supply in the river basin.

Keywords: region, product, demand, supply, price, supply volume, quadratic programming

В нашей статье [5] мы представили модель определения цен и объема поставок товаров между регионами, в которой предполагалось существование нескольких регионов, взаимодействующих между собой путем поставки друг другу некоторого однородного товара. Предполагалось, что каждый из регионов представляет собой отдельный рынок, на котором определяются спрос и предложение. Для каждого региона были определены функции, ставящие в соответствие цене производство и потребление товара в регионе. Также предполагалось, что для регионов в каждой возможной паре известны транспортные расходы на одну единицу товара, которые не зависят от объема перевозок. В данной статье мы продолжим рассмотрение модели и теперь при заданных региональных линейных соотношениях спроса и предложения и заданных транспортных издержках мы определим: 1) чистую цену в каждом регионе 2) количество экспорта и импорта для каждого региона 3) объем и направление торговли в каждой возможной паре регионов.

Введем следующие обозначения:

i – индекс региона, i и j – индексы пары регионов, $i, j = 1,\dots, n$.

$P_d = (p_1^d, p_2^d, ..., p_n^d)^{\mathrm{T}}$ – региональные цены в пунктах спроса,

$D = (d_1, d_2, \ldots, d_n)^T$ – определенные линейные региональные соотношения спроса. Т.о., D – это вектор-столбец с n компонентами $d_1, d_2, \ldots, d_n$, которые являются линейными функциями региональных цен p_i^d, так что

$$d_i = \alpha_i - \beta_i p_i^d,\ \alpha_i > 0, \beta_i > 0,\ i = \overline{1,n}$$

где α_i и β_i – параметры, описывающие соотношения спроса для i-го региона.

В матричной форме соотношения спроса можно записать следующим образом:

$$\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \ldots \\ d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \ldots \\ \alpha_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \beta_{11} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \beta_{22} & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \beta_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1^d \\ p_2^d \\ \ldots \\ p_n^d \end{pmatrix},$$

или

$$D = \alpha - \beta P_d$$

$P_s = (p_1^s, p_2^s, \ldots, p_n^s)^T$ – региональные цены в пунктах предложения,

$S = (s_1, s_2, \ldots, s_n)^T$- определенные линейные региональные соотношения предложения. Т.о., S – это вектор-столбец с n компонентами $s_1, s_2, \ldots, s_n$, которые являются линейными функциями региональных цен p_j^s, так что

$$s_j = \theta_j + \gamma_j p_j^s,\ \theta_j \text{ может принимать любые значения}, \gamma_j > 0,\ j = \overline{1,n},$$

где θ_j и γ_j – параметры, описывающие соотношения предложения для j-го региона.

В матричной форме соотношения предложения можно записать следующим образом:

$$\begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \ldots \\ s_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \ldots \\ \theta_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \gamma_{11} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \gamma_{22} & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \gamma_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1^s \\ p_2^s \\ \ldots \\ p_n^s \end{pmatrix},$$

или

$$S = \theta + \gamma P_s$$

$P = (P_d, P_s)^{\mathrm{T}} = (p_1^d, p_2^d, ..., p_n^d, p_1^s, p_2^s, ..., p_n^s)^{\mathrm{T}}$ - вектор цен в i-ом и j-ом пунктах спроса и предложения соответственно,

c_{ij} – транспортные издержки по перевозке товара между регионами,

C – матрица размерности ($n\times n$) транспортных издержек на единицу перевозимого товара между пунктами спроса и предложения

X – матрица размерности ($n\times n$) возможных неотрицательных потоков между пунктами спроса и предложения, тогда

$$p_i^d = \frac{\alpha_i}{\beta_i} - \frac{1}{\beta_i}\left(\sum_{j=1}^{n} x_{ij}\right), \; i = 1\ldots n$$

$$p_j^s = -\frac{\theta_j}{\gamma_j} - \frac{1}{\gamma_j}\left(\sum_{i=1}^{n} x_{ij}\right), \; j = 1\ldots n$$

Таким образом на основе экономико-математической модели определения цен на перевозимый товар и его объема можно сформулировать экстремальную задачу (подробнее об экстремальных задачах см., например, в [6]). Поскольку поставки товара происходят попарно между всеми регионами, целевую функцию задачи нельзя представить в линейном виде – она является квадратичной, и соответствующая задача является задачей квадратичного программирования (подробнее о задачах квадратичного программирования см, например, в [4]):

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{\beta_i} \sum_{\substack{j=1 \\ i\neq j}}^{n} x_{ij} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\beta_i}\left(\sum_{\substack{j=1 \\ i\neq j}}^{n} x_{ij}\right)^2 - \sum_{j=1}^{n}\left(-\frac{\theta_j}{\gamma_j}\right)\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} x_{ij} -$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{\gamma_j}\left(\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} x_{ij}\right)^2 - \sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} c_{ij} x_{ij} \rightarrow \max$$

$$p_i^d - p_j^s \le c_{ij}, \; i = \overline{1,n}, \; j = \overline{1,n}$$

$$x_{ij} \ge 0.$$

Экономическая интерпретация этих условий равновесия заключается в том, что различие в ценах между двумя регионами может определяться по крайней мере единицей транспортных затрат (иначе была бы возможность арбитража), а в случае равновесия для тех регионов, для которых потоки имеют место, разница в ценах совпадает со значением затрат. Для регионов, где разница цен меньше затрат, нет потоков, т.е. $x_{ij} = 0$. Эти ценовые условия согласуются с условиями, вытекающими из конкурентного поведения и нескоординированных усилий n поставщиков продать их продукты по максимально возможным ценам.

Для того чтобы представить задачу в виде, удобном для решения стандартными методами, конвертируем x в p (X в P соответственно) и получим:

$$\varphi(p) = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \alpha_i p_i^d - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \beta_i (p_i^d)^2 - \sum_{j=1}^{n} \theta_j p_j^s - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \gamma_j (p_j^s)^2 \to \max$$

$$p_i^d - p_j^s \le c_{ij}, \; i = \overline{1,n}, \; j = \overline{1,n}$$

$$p_i^d \ge 0, \; p_j^s \ge 0, \; i = \overline{1,n}, \; j = \overline{1,n}.$$

или в матричной форме:

$$\varphi(P) = \begin{pmatrix} \alpha \\ -\theta \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} P - \frac{1}{2} P^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} P \to \max$$

$$G^{\mathrm{T}} P \le C,$$

$$p^d \ge 0, \; p^s \ge 0,$$

где G – матрица размерности $2n \times n^2$, состоящая из 0, 1 и (-1):

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & 0 & \ldots & 1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -1 & -1 & \ldots & -1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & -1 & -1 & \ldots & -1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & -1 & -1 & \ldots & -1 \end{pmatrix},$$

при этом

$$GX + \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} \alpha \\ -\theta \end{pmatrix}.$$

Продемонстрируем использование представленной модели для получения оптимального распределения и определения цен на воду в условиях регулируемого предложения воды в гипотетическом бассейне реки (о распределении водных ресурсов см. также в [16]). Модель предполагает, что городская администрация бассейна реки действует как единственный общественный полезностный распределитель воды с течением времени, и что мощности для предложения воды внутри любого временного периода могут быть ограничены физической структурой системы (о принятии экономических решений городской администрацией см. также в [7]).

Предполагается также, что городская администрация, отвечающая за распределение и определение цен на воду, не действует как максимизирующий прибыль монополистический поставщик, а проводит политику, которая удостоверяет, что максимизируется социальное благосостояние в отношении доступной воды.

В этих условиях рыночная цена воды равна предельным затратам поставщиков воды на рынок, которые в свою очередь равны стоимости использования последней единицы воды, приобретенной различными потребителями. Поскольку администрация речного бассейна является только распределителем воды, цена не может устанавливаться свободной конкуренцией множества покупателей и продавцов. Однако, конкурентные результаты могут все еще достигаться, если администрация устанавливает цену каждому классу потребителей на уровне предельных затрат по обслуживанию этих потребителей, и цена сдерживается уровнем регулируемого предложения на основе административных или других нерыночных соображений.

Предполагается, что вместимость водохранилища и структура распределения фиксированы. Следовательно, соответствующая вместимость системы может ограничивать поставки в периоды повышенного спроса. Таким образом, цены на воду могут варьироваться не только между регионами, но также и внутри региона.

Предположим, что три региона конкурируют за воду, размещенную в головном резервуаре. Например, регион 1 может являться промышленным комплексом, регион 2 – городской территорией, регион 3 – ирригационной территорией. Вода транспортируется из резервуара в регионы 1 и 2 через трубопровод и очищается на очистном заводе перед тем, как быть распределенной в жилой и промышленный сектора. Открытие шлюза и закрытие плотины на главное русло отводит ирригационную воду через канал к ирригационной территории.

Ценовая политика для бассейна реки такова, что необходимо максимизировать доход при ограничениях на регулируемое предложение воды. Предложение воды каждому региону ограничивается физическими характеристиками системы, а именно, общим предложением доступной воды, вместимостью водохранилища, операционной эффективностью транспортировки воды.

Пусть функции спроса и предложения для каждого пункта выглядят следующим образом:

Регион 1

$d_1 = 200 - 10 p_1^d$,

$s_1 = -50 + 10 p_1^s$

Регион 2

$d_2 = 100 - 5 p_2^d$

$s_2 = -50 + 20 p_2^s$

Регион 3

$d_3 = 160 - 8 p_3^d$

$s_3 = -50 + 10 p_3^s$

Пусть транспортные расходы между регионами 1 и 2, 1 и 3, 2 и 3 составляют 2, 2, и 1 тыс. д.е. соответственно. Тогда модель будет выглядеть следующим образом:

$$f(P) = 200 p_1^d - \frac{1}{2}\cdot 10(p_1^d)^2 + 100 p_2^d - \frac{1}{2}\cdot 5(p_2^d)^2 + 160 p_3^d - \frac{1}{2}\cdot 8(p_3^d)^2 +$$

$$+ 50 p_1^s - \frac{1}{2}\cdot 10(p_1^s)^2 + 50 p_2^s - \frac{1}{2}\cdot 20(p_2^s)^2 + 50 p_3^s - \frac{1}{2}\cdot 10(p_3^s)^2 \to \max$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} p_1^d \\ p_2^d \\ p_3^d \\ p_1^s \\ p_2^s \\ p_3^s \end{pmatrix} \le \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \\ x_{21} \\ x_{22} \\ x_{23} \\ x_{31} \\ x_{32} \\ x_{33} \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} p_1^d \\ p_2^d \\ p_3^d \\ p_1^s \\ p_2^s \\ p_3^s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \\ 160 \\ 50 \\ 50 \\ 50 \end{pmatrix},$$

$p^d \ge 0$, $p^s \ge 0$, $x_{ij} \ge 0$, $i = 1, 2, 3$, $j = 1, 2, 3$.

Решая эту задачу с помощью средств пакета прикладных программ MS Excel, получим следующее:

$p_1^d = p_1^s = 10{,}761905,$

$p_2^d = p_2^s = 8{,}761905,$

$p_3^d = p_3^s = 9{,}761905,$

$x_{11} = 0$, $x_{12} = 8{,}571429$, $x_{13} = 49{,}04762$,
$x_{21} = 92{,}38095$, $x_{22} = 0$, $x_{23} = 32{,}85714$,
$x_{31} = 0$, $x_{32} = 47{,}61905$, $x_{33} = 0$.

Таким образом, мы показали, как пространственное равновесие может быть конвертировано в задачу квадратичного программирования. Были сформулированы модели и определены алгоритмы, которые могут быть использованы для получения решений по межрегиональной конкурентной цене и потоку для единственного продукта в случае *n* регионов, где региональный спрос и предложение представлены непрерывными линейными функциями. Формулировки, обсуждаемые в статье, могут применяться для анализа многих типов равновесных моделей.

Библиографический список:

1. Базилевич С.В. Количественные методы в управлении. – М.: КноРус, 2016. – 153с.
2. Глухов В.В., Медников М.Д., Коробко С.Б. Математические методы и модели для менеджмента. – Спб: Лань, 2005. – 528с.
3. Грызина Н.Ю., Мастяева И.Н., Семенихина О.Н. Математические методы исследования операций в экономике: Учебно-методический комплекс. – М.: Изд. центр ЕАОИ, 2008. – 204с.
4. Конюховский П.В. Математические методы исследования операций в экономике. – СПб.: Изд-во СПбГУ, 2008. – 395с.
5. Коростелева М.В. Модель определения цен и объема поставок товаров между регионами // Материалы II международной научно-практической конференции, посвященной 75-летию экономического факультета Санкт-Петербургского государственного университета; III международной научной конференции - Соколовские чтения «Бухгалтерский учет: взгляд из прошлого в будущее; международной весенней конференции молодых ученых-экономистов «Наука молодая». – Санкт-Петербург: Изд-во «Скифия-принт». – 2015. – С. 508-509.

6. Коростелева М.В. Основы линейного программирования. – СПб.: ОЦЭиМ. – 2004. – 44с.
7. Коростелева М.В. Особенности применения экономико-математических методов при формировании инвестиционных программ городской администрации // Государственный советник. – Воронеж: Экологическая помощь. – 2014. - №3(7). – С. 32-37.
8. Кремер Н.Ш. Математика для экономистов: от Арифметики до Эконометрики - М.: Юрайт, 2010. - 646с.
9. Математические методы и модели исследования операций / В. А. Колемаев, Т. М. Гатауллин, Н. И. Заичкин и др. – М.: ЮНИТИ, 2009. – 591с.
10. Орлова И.В., Половников В.А. Экономико-математические методы и модели: компьютерное моделирование. Учебное пособие. – М: Вузовский учебник, 2007. – 365с.
11. Таха, Х. А. Введение в исследование операций: – М.: Издательский дом «Вильямс», 2005. – 901с.
12. Шапкин А.С. Математические методы и модели исследования операций: - М.: Дашков и Ко, 2006. - 396с.
13. Экономическое моделирование в Microsoft Excel./Мур Дж., Уэдерфорд Л.Р. и др. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2004. – 1024с.
14. Committee on the Assessment of Water Reuse as an Approach to Meeting Future Water Supply Needs, and National Research Council (2012) Water Reuse: Potential for Expanding the Nation's Water Supply through Reuse of Municipal Wastewater, Washington, DC, USA: National Academies Press.
15. Frérot, A. (2011) Water, Lebanon, US: New Hampshire.
16. Korosteleva M. The analysis of water supply investment proposals // Proceedings of the third international economic symposium (IES 2018) "Advances in Economics, Business and Management Research". – Atlantis Press. – 2019. – P. 143-147.

17. Operations Research. A Model-Based Approach. H. A. Eiselt, C.-L. Sandblom. – Springer Berlin Heidelberg, 2010. – 447 p.
18. Tshimanga, R. M., & Hughes D. A. (2014) "Basin-scale performance of a semidistributed rainfall-runoff model for hydrological predictions and water resources assessment of large rivers: The Congo River". Water Resource Research, no. 50, pp. 1174–1188.
19. Twort, A.C., Ratnayaka, D.D., & Brandt, M.J. (2000) Water Supply, Jordan Hill, GBR: Butterworth-Heinemann.
20. Wiley encyclopedia of operations research and management science/ed.-in-chief J. J. Cochran. - Hoboken, NJ: Wiley, 2011. - 13468p.

Оригинальность 87%